数理解析研究所講究録
856 巻 1994 年 40-52

2個の凸な物体による散乱行列の極

大阪大学理学部 井川 満 (M. Ikawa)

§1. 序

$\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 3$, 奇数) における波動方程式

$$\square u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

に支配される振動現象を考える. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^n$ の有界な開集合で, $\Gamma = \partial\mathcal{O}$ は滑かで

(1.1) $\qquad \Omega = \mathbb{R}^n - \overline{\mathcal{O}}$: 連結

となるものとする. この有界な物体による散乱を考える. $\mathcal{O}$ によってきまる散乱行列を $\mathcal{S}(z)$ と記す. $\mathcal{S}(z)$ は $\mathcal{L}(L^2(S^{n-1}))$ 値関数で全複素平面 $\mathbb{C}$ で meromorphic で, $\mathrm{Im}\, z \leq 0$ で正則なものである.

有界な物体と散乱行列とは1対1に対応している, すなわち, $\mathcal{O}$ と $\tilde{\mathcal{O}}$ を2つの有界な物体としよう. それぞれに対応する散乱行列を $\mathcal{S}(z)$ 及び $\tilde{\mathcal{S}}(z)$ と記そう. もし,

$$\mathcal{S}(z) = \tilde{\mathcal{S}}(z)$$

ならば,

$$\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$$

が従う。すなわち,物体の幾何的情報のすべては $\mathcal{S}(z)$ の中に含まれている。我々は次の問題を考えたい。

問題　物体 $\mathcal{O}$ の幾何学的性質は $\mathcal{S}(z)$ の中にどのように現れているか。

この問題は現在のところ、ほとんど未開拓であって,解っている部分は極めて少ない。そのうちの代表的なものを挙げる:

1. Non-trapping の場合　Melrose [9] により, $\mathcal{O}$ が幾何光学の意味で non-trapping ならば,ある $a, b > 0$ が存在して

$$\{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im}\, z \leq a \log(|z|+1) + b\}$$

には $\mathcal{S}(z)$ の極は存在しない。

2. 2個の strictly convex な物体.

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$$

で, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ は有界かつ strictly convex であり, $\overline{\mathcal{O}}_1 \cap \overline{\mathcal{O}}_2 = \phi$ とする。$\Gamma_\ell = \partial\mathcal{O}_\ell$ $(\ell = 1, 2)$ とおく。$A_\ell \in \Gamma_\ell$ を

$$|A_1 - A_2| = \mathrm{dis}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$$

となるものととる。$\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ が strictly convex であるから

A_1, A_2 は一意に決まる. $d=|A_1-A_2|$ とおく. A_ℓ の近くでの Γ_ℓ の幾何的性質から決まる定数の列

$$0<c_0\leq c_1\leq c_2\leq\cdots\cdot$$
$$(\,c_m\to\infty \quad \text{as} \quad m\to\infty)$$

が存在して, 次が成り立つ: $a>0$ を一つ固定する毎に, ある $J>0$ がさだまり, $\mathrm{Im}\, z\leq a$, $|\mathrm{Re}\, z|\geq J$ の範囲では, $\mathcal{S}(z)$ の poles は

$$\frac{\pi}{d}j+\sqrt{-1}\ c_m\ ,\quad j=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdot$$
$$m=0,1,2,\cdots$$

の近傍にのみ存在する. 勿論 $\mathrm{Im}\, z\leq a$, $|\mathrm{Im}\, z|\geq J$ の範囲にある上の格子点の近くには必ず存在すること, その j に関する漸近的位置の詳しい形も与えられている (Ikawa[3], C. Gérard[2]).

上の結果において, A_1, A_2 における Γ_1, Γ_2 の曲率が消える場合には, どのような変化が $\mathcal{S}(z)$ の極の分布に現れるであろうか。 c_m $(m=0,1,2,\cdots\cdot)$ を与える公式において, Γ_1, Γ_2 の A_1, A_2 における曲率を段々と小さくしていくと, それに連れて c_m が小さくなってくる. A_1, A_2 においてすべての主曲率が 0 になると, c_m も全て 0 になる. 従って

このような場合には，$\mathcal{S}(z)$ の poles は実軸のいくらでも近くに存在することが予想される．しかし，[2],[3] の方法はもはや使えなくなる．

この問について，Ikawa [4] で A_1, A_2 で主曲率が全て0になる $\mathbb{R}^3$ における例を考察し，その例に対しては、$\mathcal{S}(z)$ の極は，ある $\gamma > 0$ が存在して

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \; ; \quad \operatorname{Im} z \leq \left(|\operatorname{Re} z| + 1 \right)^{-\gamma} \right\}$$

の中に無限個存在することが示された．

しかし，[2],[3] の結果から，この場合も極は $\frac{\pi}{d} j$ で表される点の近くにのみ存在して，その点以外の実軸の近傍には極が存在しないことが予想される．しかし，[4] において用いられた証明方法は，Bardos-Guillot-Ralston[1] で証明された trace formula に依るものである．trace formula を用いた方法では，個々の pole の位置についての情報を得るのは極めてむつかしく，実質的には不可能といってもさしつかえない程である．

本講演においては，$\mathbb{R}^2$ における例を考察し，その resolvent の上半平面への解析接続を考察する．その結果は上に挙げた問に部分的な答を与える．

§2. 主結果

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \in \mathbb{R}^2$ で次の性質をもつものとする.

(1) $\mathcal{O}_1 \subset \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 < 0\}$,

(2) $A_1 = (0, 0) \in \Gamma_1$,

(3) Γ_1 は A_1 の近傍では

$$x_2 = -x_1^{2m} \qquad (m \geqq 2)$$

と表されており，Γ_1 は A_1 以外では曲率は正となる。

(4) $\mathcal{O}_2 \subset \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_2 > d\} \quad (d > 0)$,

(5) $A_2 = (0, d) \in \Gamma_2$

(6) Γ_2 は A_2 の近傍では

$$x_2 = d + x_1^{2m}$$

と表されており，Γ_2 の曲率は A_2 以外ではいつも正である。

上の性質をもつ $\mathcal{O}$ に対して

$$\Omega = \mathbb{R}^2 - \bar{\mathcal{O}}, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

とおく。$\mu \in \mathbb{C}$ に対して境界値問題

$$(2.1) \qquad \begin{cases} (\Delta + \mu^2)\, u(x) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

ここで $g(x) \in C^\infty(\Gamma)$ とする. $\mathrm{Im}\,\mu < 0$ とすると, (2.1) は $L^2(\Omega)$ の中にはただ一つの解をもつ. この解 $u(x)$ を

$$u(x) = (U(\mu)g)(x)$$

とおこう. 解の正則性定理より, $U(\mu)$ は $C^\infty(\Gamma)$ より, $C^\infty(\overline{\Omega})$ への写像となる. (2.1) の μ への依 の仕方より直ちに, $\mathrm{Im}\,\mu < 0$ において $U(\mu)$ は $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\overline{\Omega}))$- 値正則関数となる. 我々は $\mathrm{Im}\,\mu \geq 0$ に $U(\mu)$ を解析接続することを考える.

<u>定理 1.</u> 我々は Γ_1, Γ_2 の定義に現る m が

(2.2) $$m \geq 4$$

を満しているものとする.

$$\alpha = \frac{1}{m-1}$$

とおく.

任意の $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ に対して, ある定数 $C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0$ がとれて $U(\mu)$ は下で与えられる領域まで解析的に接続される:

(2.3) $$\{\mu ; \mathrm{Im}\,\mu \leq |\mathrm{Re}\,\mu|^{-(1+2\alpha)^{-1} - \varepsilon_1}, \ |\mathrm{Re}\,\mu| \geq C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}\} - \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{\mu ; \ \mathrm{Im}\,\mu \geq 0 \text{ かつ } |\tfrac{\pi}{\alpha} n - \mathrm{Re}\,\mu| < \varepsilon_2\}.$$

$U(\mu)$ の極と $\mathcal{S}(z)$ の極は一致することは知られているので，上の定理は $\operatorname{Im} z \leq (|\operatorname{Re} z|+1)^{-(1+2\alpha)^{-1}-\varepsilon_1}$ の範囲では $\frac{\pi}{d} j$ $(j=0,\pm 1,\ldots)$ 以外には $\mathcal{S}(z)$ は pole をもたないことがわかる．今後の課題としては，$\frac{\pi}{d} j$ の近くに実際に pole があるかということがある．又上の領域の外での pole の分布の仕方の研究も勿論重要であるが，こちらの方はこの方法ではほとんど不可能に近い印象である．従って，本講演で用いたのとは別の考察が必要のようである．

§3. 証明の方針

Oscillatory boundary data on Γ_1

$$g(x,\mu) = e^{-i\mu x\cdot\omega} f(x), \tag{3.1}$$

$\operatorname{supp} f \subset$ small neighborhood of A_1

に対して (2.1) の解の構成を考える．

Proposition 3.1. ω を S^1 の元で $(0,1)$ に十分近いものとし，

$$\varphi_1(x) = x\cdot\omega$$

とおく．その時 phase function の列 $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ で，

$$|\nabla\varphi_j| = 1$$

$$(3.2)\qquad \varphi_{2n}(x) = c_0(x) + 2nd + c_1(x)\, n^{-1-2\alpha} + \cdots$$
$$+ c_M(x)\, n^{-1-(M+1)\alpha},$$

$$(3.3)\qquad \varphi_{2n+1}(x) = \tilde{c}_0(x) + (2n+1)d + \tilde{c}_1(x)\, n^{-1-2\alpha} +$$
$$\cdots + \tilde{c}_M(x)\, n^{-1-(M+1)\alpha},$$

また Γ_1 の A_1 の近くでは

$$(3.4)\qquad (\varphi_{2n} - \varphi_{2n-1})(x) = e_0(x) + e_{N-1}(x)\, e^{-1-N\alpha}$$
$$+ e_N\, e^{-1-(N+1)\alpha} + \cdots + e_M(x)\, e^{-1-(M+1)\alpha},$$

Γ_2 上の A_2 の近くでは

$$(3.5)\qquad (\varphi_{2n+1} - \varphi_{2n})(x) = \tilde{e}_0(x) + \tilde{e}_{N-1}(x)\, e^{-1-N\alpha}$$
$$+ \tilde{e}_N\, e^{-1-(N+1)\alpha} + \cdots + \tilde{e}_M(x)\, e^{-1-(M+1)\alpha}$$

をみたすものがとれる。ここで

$$(3.6)\qquad |e_0(x)|,\ |\tilde{e}_0(x)| \le C_N\, |x_1|^N$$

ここで, N はあらかじめ任意に選んで固定する。$\{\varphi_j\}$, M はこれに依存する。

上の性質をみたす $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ に対して

$$u_j(x,\mu) = e^{-i\mu\varphi_j(x)}\, v_j(x,\mu),$$
$$v_j(x,\mu) = \sum_{p=0}^{P} v_{jp}(x)\,(i\mu)^{-p}$$

の形の関数列を次により順次定めよう：

$$T_j = 2\nabla\varphi_j\cdot\nabla + \Delta\varphi_j$$

とおく．v_{00} を

$$\begin{cases} T_0 v_{0\,0} = 0 & \text{in } \Omega(\delta) \\ v_{00} = f & \text{on } S_1(\delta), \end{cases}$$

ここで $S_1(\delta) = \Gamma_1 \cap \{A_1$ の δ 近傍$\}$，$\Omega(\delta)$ は A_1A_2 の δ 近傍とする．$p=1, 2, \ldots$ に対し v_{0p} を

$$\begin{cases} T_0 v_{0p} = -\Delta v_{0, p-1} & \text{in } \Omega(\delta) \\ v_{0p} = 0 & \text{on } S_1(\delta). \end{cases}$$

$j \geq 1$ に対しては

$$\begin{cases} T_j v_{jp} = \Delta v_{j, p-1} & \text{in } \Omega(\delta) \\ v_{jp} = v_{j-1, p} & \text{on } S_{\epsilon(j)}(\delta) \end{cases}$$

ここで，$\epsilon(j)=1$，j：偶，$\epsilon(j)=2$，j：奇と定める．

<u>Lemma 3.2.</u>

(3.7) $$v_{2n, p}(x) \sim w_{p0}\, n^p + w_{p1}\, n^{p-\alpha} + \cdots$$

(3.8) $$v_{2n+1, p}(x) \sim \tilde{w}_{p0}\, n^p + \tilde{w}_{p1}\, n^{p-\alpha} + \cdots$$

なる展開をもつ．

$\operatorname{Im}\mu = \sigma < 0$ に対して

$$u(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(x, \mu)$$

上の級数は収束し，

(3.9) $$(\Delta+\mu^2)u(x,\mu) = (i\mu)^{-\ell}\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i\mu\varphi_n(x))\Delta v_{n\ell}(x),$$

(3.10) $$|u(x,\mu)-g(x,\mu)| \leq C_{N,\ell,\varepsilon_0}|\mu|^{-2N}$$

$$\text{for} \quad x\in\Gamma_1 \quad \text{and} \quad |x_1|\leq|\mu|^{-2}$$

(3.11) $$|u(x,\mu)| \leq C_{N,\ell,\varepsilon_0}|\mu|^{-2N}$$
$$\text{for} \quad x\in\Gamma_2 \quad \text{and} \quad |x_1|\leq|\mu|^{-2}.$$

次に $\mathrm{Im}\,\mu\geqq 0$ への $u(x,\mu)$ の解析接続を考える．もし，(3.2) において $c_1(x)=\cdots=c_M(x)=0$ と仮定すると，

$$u_e = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(x,\mu) = e^{-i\mu(c_0(x)+2nd)} \times\sum_{p=0}^{\ell}(i\mu)^{-p}(w_{p0}n^p+\cdots\quad)$$

となる．従って $u_e(x,\mu)$ は $z=e^{-i2d\mu}$ とおくと

$$e^{-i\mu c_0}\,w_{p\ell}\,(i\mu)^{-p}\sum_{n=0}^{\infty} z^n n^{p-\alpha\ell}$$

の形の関数の和で表される．この形の関数の z に関する解析接続を考察しよう．$|z|<1$ に対して

$$F(z,s:m) = \sum_{n\geq m} z^n n^{-s}$$

とおこう。$s \in \mathbb{C}$ とする。

Lemma 3.3. 任意の $s \in \mathbb{C}$ と正の数 m に対して z の関数としての $F(z, s : m)$ は

$$D = \mathbb{C} - [1, \infty)$$

に解析接続できる。かつ，次の評価式が成り立つ：

$$|F(z, s : m)| \leq C_{K,a} \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\, s + a)}{|\Gamma(s+a)|} m^{-\mathrm{Re}\, s} |z|^m (1+|z|)^a$$

$$\text{for all} \quad \mathrm{Re}\, s > -a \quad \text{and} \quad z \in K$$

ここで，K は D の任意の compact 部分集合，a は任意の正の整数とする。$C_{K,a}$ は K と a に依存して決まる定数.

この結果を (3.9)，(3.10)，(3.11) に適用して定理を得る。この時，上の説明では (3.2) における係数 $c_j(x)$, $j \geq 1$ はすべて 0 と仮定した。これが 0 でないので，この取り扱いは perterbation として行う。そのために，

$$\mathrm{Im}\, \mu \leq (|\mathrm{Re}\, \mu| + 1)^{-(1+2\alpha)^{-1} - \varepsilon_1}$$

の条件を用いる。

ここでは Proposition 3.1 の証明には全く触れなかった。これまでの説明で解るように，Proposition 3.1 を認めると，それ以外はどちらかといえば，これまで知られてい

る方法を注意深く適用すれば良い.

定理1における仮定 $n\geq 4$ がどこに用いられたかが, 以上の説明の中には全然現れていない。これは, Proposition の証明の過程で用いられていることを注意するにとどめよう.
Proposition 3.1 の証明は相当に長くなる. その本質的部分は A_1 と A_2 の近傍で反射を繰り返す geometric optics の ray の反射回数が増加してゆく場合の反射回数に関する漸近挙動を得ることである. この部分に A_1, A_2 における曲率が消えているか, 消えていないかの差が最も本質的に現れる.

§4. 今後の問題

直接的には, §2に記したように, $\frac{\pi}{d}j$ の近くに $\mathcal{S}(z)$ の pole が実際存在するかどうかを調べることが挙げられる.

次に, $n\geq 3$ の場合を考察する必要がある. $n=2$ と 3 の違いも, Proposition 3.1 を証明する時の複雑さの違いとして現れる.

現在ほとんど手のついてない問題としては, いくつかの凸な物体に対しては, $\mathcal{S}(z)$ の pole は Ω の (あるいは Θ の) 何から決められているのかを具体的に知ること.

参考文献

[1] C.Bardos, J.C.Guillot and J.Ralston, *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application a la théorie de la diffusion*, Comm.Partial Diff. Equ., **7**(1982), 905–958.

[2] C.Gérard, *Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Bull.S.M.F. Tome 116 Mémoire n$^{\text{O}}$ **31**, 1989.

[3] M.Ikawa, *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J.Math. Kyoto Univ.**23**(1983), 127–194.

[4] M.Ikawa, *Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis*, Osaka J.Math., **22**(1985), 657–689.

[5] M.Ikawa, *On scattering by obstacles*, Proceeding of ICM-90, Springer Verlag, 1991, 1145–1154.

[6] M.Ikawa, *Scattering by two convex bodies*, Séminaire Equation aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, 1991–1992 Exposé n$^{\text{O}}$ XIII.

[7] P.D.Lax and R.S.Phillip, Scattering Theory, Revised Edition, Academic Press, New York, 1989.

[8] P.D.Lax and R.S.Phillip, *A logathmic bound on the location of the poles of the scattering operator*, Arch.Rat.Mech., **40**(1971), 269–280.

[9] R.Melrose, *Singularities and energy decay in acoustical problem*, Duke Math.J., **46**(1979), 43–59.

[10] B.R.Vainberg, *On the short wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as* $t \to \infty$ *of solutions of non-stationary problems*, Russian Math.Surveys, **30-2**(1975), 1–58.

[11] W.A.Veech, A second course in complex analysis, Benjamin, New York, 1967.